CP n° 4 - Techniques en analyse

1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

Propriétés. *Soit $x, y \in \mathbb{R}$.*

- ***Addition d'un réel :*** *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$x \leqslant y \iff x + \lambda \leqslant y + \lambda$$

- ***Somme d'inégalités :*** *pour tous $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{cases} x_1 \leqslant y_1 \\ x_2 \leqslant y_2 \end{cases} \implies x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$$

et de façon plus générale, pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$:

$$\left(\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k \leqslant y_k\right) \implies \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k$$

- ***Produit par un réel :*** *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$\boldsymbol{si\ \lambda \geqslant 0}\ \textbf{:}\ \ x \leqslant y \implies \lambda x \leqslant \lambda y$$
$$\boldsymbol{si\ \lambda \leqslant 0}\ \textbf{:}\ \ x \leqslant y \implies \lambda x \geqslant \lambda y$$

- ***Produit d'inégalités de réels positifs :*** *pour tous $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+$:*

$$\begin{cases} x_1 \leqslant y_1 \\ x_2 \leqslant y_2 \end{cases} \implies x_1 x_2 \leqslant y_1 y_2$$

et de façon plus générale, pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}_+$,

$$\left(\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k \leqslant y_k\right) \implies \prod_{k=1}^{n} x_k \leqslant \prod_{k=1}^{n} y_k$$

Définitions. *Soit f une application $D \to \mathbb{R}$ où D est une partie de $\mathbb{R}$. On dit que f est :*

- *croissante si pour tous $a, b \in D$: $\boxed{a \leqslant b \implies f(a) \leqslant f(b)}$*
- *strictement croissante si pour tous $a, b \in D$: $a < b \implies f(a) < f(b)$*
- *décroissante si pour tous $a, b \in D$: $\boxed{a \leqslant b \implies f(a) \geqslant f(b)}$*
- *strictement décroissante si pour tous $a, b \in D$: $a < b \implies f(a) > f(b)$*
- *monotone si elle est croissante ou décroissante ;*
- *strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Remarque (de logique)**.** *Lorsque f est **strictement croissante**, on a (pour tous $a, b \in D$) l'**équivalence***

$$a \leqslant b \iff f(a) \leqslant f(b).$$

En effet, pour prouver le sens $f(a) \leqslant f(b) \implies a \leqslant b$, on regarde sa contraposée $a > b \implies f(a) > f(b)$, qui est vraie.

Conséquence sur les bijections : soit f une fonction réelle réalisant une bijection entre deux parties D et $\tilde{D}$ de $\mathbb{R}$.
Si f est monotone (nécessairement strictement monotone, car elle est injective), alors sa réciproque f^{-1} a la même monotonie que f (c-à-d strict. croissante si f l'est, et strict décroissante si f l'est).

dem : mettons que $f : D \to \tilde{D}$ est strictement croissante. Alors pour tous réels $\tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{D}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\tilde{a}) < f^{-1}(\tilde{b}) &\iff f\big(f^{-1}(\tilde{a})\big) < f\big(f^{-1}(\tilde{b})\big) \qquad \text{(on applique } f \text{ strict. croissante)} \\ &\iff \tilde{a} < \tilde{b} \end{aligned}$$

f^{-1} est donc bien strictement croissante.
La démonstration dans le cas où f est strictement décroissante est analogue à celle-ci.

Définition (valeur absolue)**.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ est défini par*

$$|x| = \begin{cases} x & si \ x \geqslant 0 \\ -x & si \ x < 0 \end{cases}$$

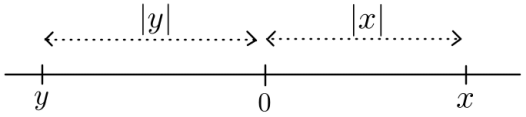
Propriétés (élémentaires des valeurs absolues)**.** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *:*

- $|x| \geqslant 0$
- $|-x| = |x|$
- $|xy| = |x|.|y|$
- ***inégalité triangulaire :*** $\boldsymbol{|x+y| \leqslant |x| + |y|}$

dem de l'inégalité triangulaire : selon le signe de $(x+y)$, $|x+y|$ vaut $(x+y)$ ou $(-x-y)$.
Or : $\begin{cases} x \leqslant |x| \\ -x \leqslant |x| \end{cases}$ et $\begin{cases} y \leqslant |y| \\ -y \leqslant |y| \end{cases}$
Donc $x + y \leqslant |x| + |y|$ et $-x - y \leqslant |x| + |y|$. Dans les deux cas, l'inégalité est bien vérifiée.

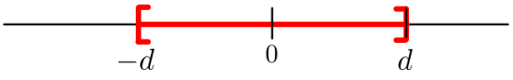
Remarques : Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

- La quantité $|x|$ mesure la **distance** entre x et 0 sur la droite réelle.

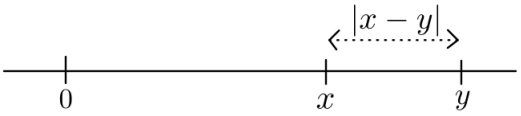


En conséquence, si $d \geqslant 0$, on a l'équivalence suivante :

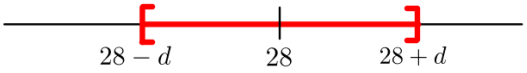
$$|x| \leqslant d \iff -d \leqslant x \leqslant d$$



- Plus généralement, la quantité $|x - y|$ mesure la **distance** entre x et y sur la droite réelle.



En effet, cette distance vaut $y - x$ si $y \geqslant x$ (comme c'est par exemple le cas sur le dessin), ou $x - y$ si $x \geqslant y$, et dans les deux cas, cela vaut $|x - y|$.
Par conséquent, si $d \geqslant 0$, l'inégalité $|x - 28| \leqslant d$ signifie que x est situé à une distance du nombre 28 inférieure à d.

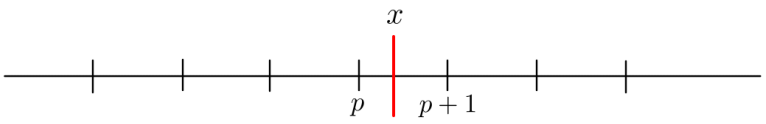


Autrement dit, $|x - 28| \leqslant d$ signifie :

$$28 - d \leqslant x \leqslant 28 + d$$

Définition (Partie entière)**.** *Soit $x \in \mathbb{R}$.*
On appelle ***partie entière*** *de x, et on note $\lfloor x \rfloor$ l'unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$p \leqslant x < p+1$$

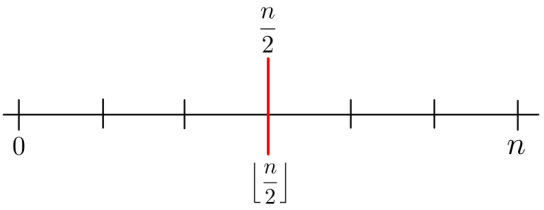


Autrement dit, il s'agit du plus grand entier parmi ceux qui sont inférieurs à x.

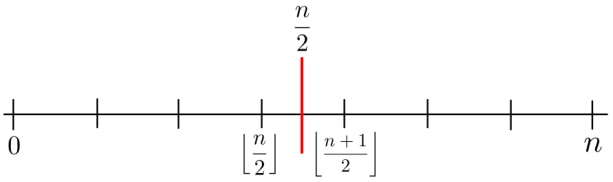
Par exemple, $\lfloor 3,2 \rfloor = 3$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$, et $\lfloor -6,2 \rfloor = -7$.

Exemple utile : si $n \in \mathbb{N}$, la quantité $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ est la "pseudo-moitié" de n au sens où :
— si n est pair, alors $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vaut effectivement $\frac{n}{2}$, car $\frac{n}{2}$ est un entier.
— si n est impair, alors $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ne vaut pas $\frac{n}{2}$, qui n'est pas un entier, mais $\frac{n}{2} - \frac{1}{2}$.

Cas où n est pair :



Cas où n est impair :



En pratique, quelle que soit la parité de n, on peut par exemple couper une somme en deux à sa pseudo-moitié :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \;=\; \left(\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_k \right) + \left(\sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n} a_k \right)$$

En Python, on peut obtenir $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ en demandant le quotient de la division euclidienne de n par 2 : `n//2`.

2 Généralités sur les fonctions réelles

Dans cette partie, D désigne une partie de $\mathbb{R}$.

2.1 Opérations sur les fonctions

Définition. *Soit f et g des fonctions de D dans $\mathbb{R}$.*

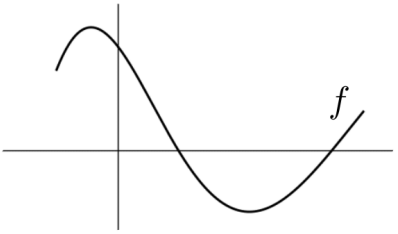
- *On note $f+g$ la fonction $x \mapsto f(x)+g(x)$.*
- *On note $f \times g$ la fonction $x \mapsto f(x) \times g(x)$.*
- *Si g ne s'annule jamais sur D, on note $\frac{f}{g}$ la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.*

Remarque : On peut combiner ces notations rapides avec les composées de fonctions et les constantes.
Exemple : Si f est une fonction $D \to \mathbb{R}$, alors $2+f+3e^f$ est la fonction :

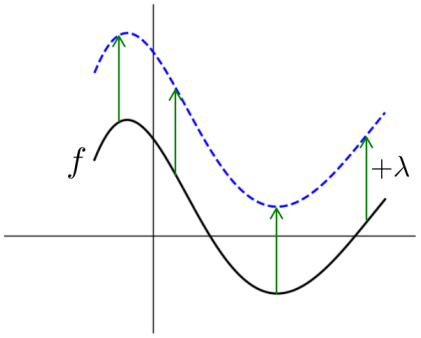
$$2+f+3e^f \ : \ \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2+f(t)+3e^{f(t)} \end{array}$$

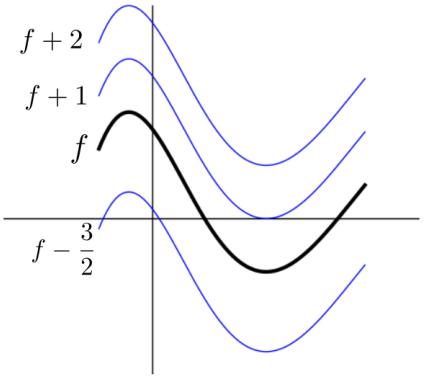
2.2 Transformations élémentaires et interprétations graphiques

Partons d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ quelconque.

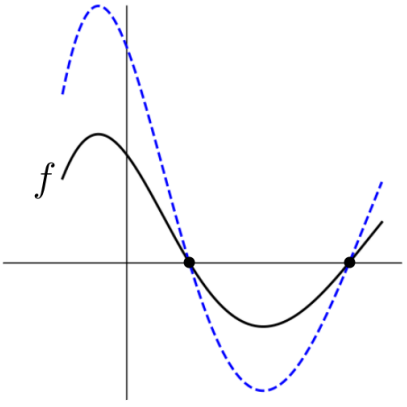


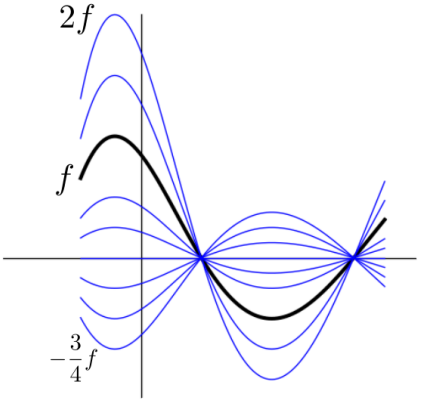
- $\boxed{\mathbf{t \mapsto f(t)+\lambda}}$
  Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le graphe de la fonction $t \mapsto f(t)+\lambda$ s'obtient en opérant sur le graphe de f une **translation verticale de λ**.





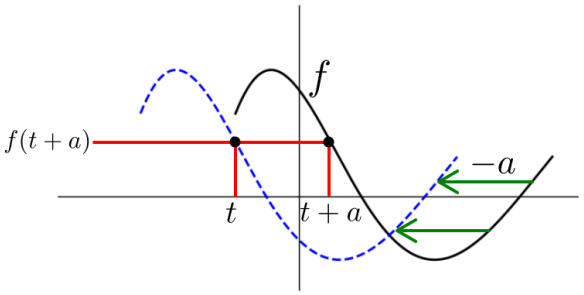
- $\boxed{\mathbf{t \mapsto \lambda f(t)}}$
  Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le graphe de la fonction $t \mapsto \lambda f(t)$ s'obtient en opérant sur le graphe de f une **dilatation verticale de rapport λ**.

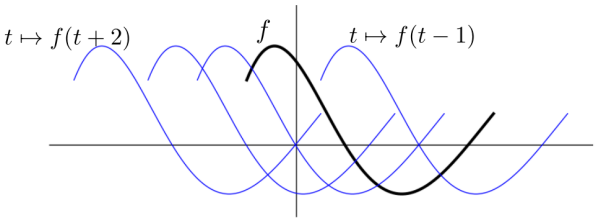




► $\boxed{\mathbf{t \mapsto f(t+a)}}$

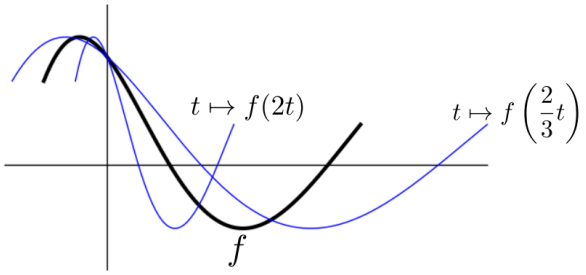
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, le graphe de la fonction $t \mapsto f(t+a)$ s'obtient en opérant sur le graphe de f une **translation horizontale de $-\mathbf{a}$**.

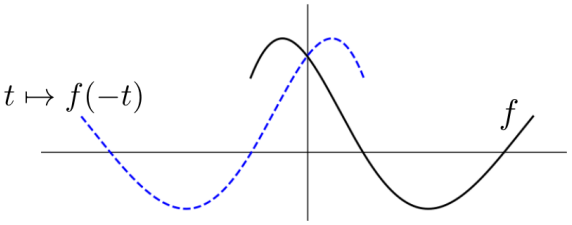




► $\boxed{\mathbf{t \mapsto f(at)}}$

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, le graphe de la fonction $t \mapsto f(at)$ s'obtient en opérant sur le graphe de f une **dilatation horizontale de rapport $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}$**.





2.3 Parité/imparité

Définition. *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite **symétrique par rapport à 0** lorsque pour tout élément $x \in A$, $-x$ appartient aussi à A.*

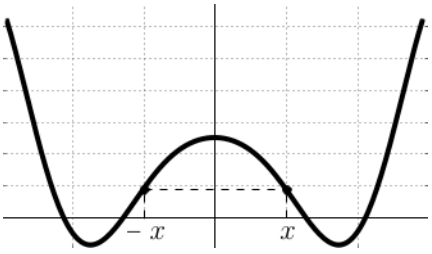
Exemple : $A = [-3, -1[\cup]1, 3]$

Définition. *Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.*

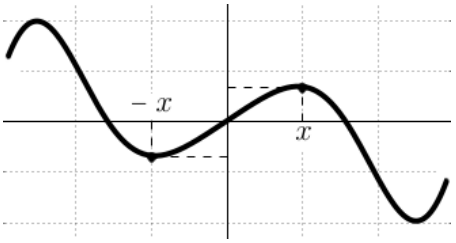
- *On dit que f est **paire** si D est symétrique par rapport à 0 et si $\forall x \in D$, $f(-x) = f(x)$.*
- *On dit que f est **impaire** si D est symétrique par rapport à 0 et si $\forall x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.*

Interprétations graphiques :

f est paire si et seulement si son graphe est symétrique (symétrie axiale) par rapport à l'axe des ordonnées.

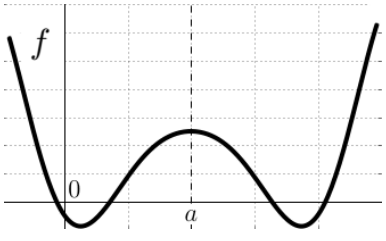


f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine $(0, 0)$ (symétrie centrale).

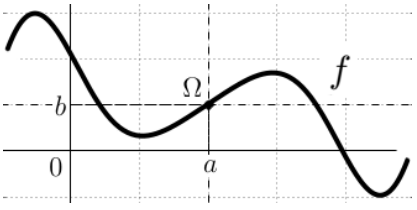


Remarques : si a et b sont deux réels :

► Le graphe de f est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = a$ ssi la fonction $x \mapsto f(x + a)$ est paire.



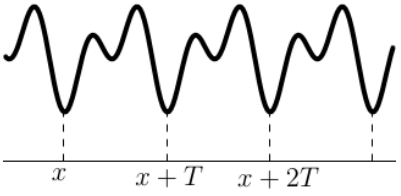
► Le graphe de f est symétrique par rapport au point $\Omega(a, b)$ si et seulement si la fonction $x \mapsto f(x + a) - b$ est impaire.



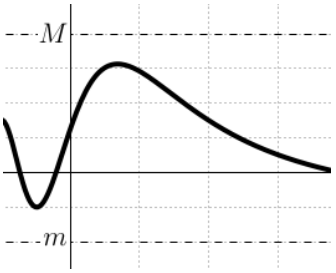
2.4 Périodicité

Définition. *Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$ et $T > 0$. On dit que f est* **T-*périodique*** *lorsque :*
— $\forall x \in D,\ x + T \in D$
— $\forall x \in D,\ f(x + T) = f(x)$

Interprétation graphique : Le graphe d'une fonction T-périodique définie sur $\mathbb{R}$ est invariant par translation de T vers la gauche ou la droite.



2.5 Fonctions majorées, minorées, bornées



Définition. *Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$. On dit que f est :*
- ***majorée*** *si $\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in D,\ f(x) \leqslant M$;*
- ***minorée*** *si $\exists m \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in D,\ f(x) \geqslant m$;*
- ***bornée*** *si elle est majorée* ***et*** *minorée.*

Proposition. *Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante :*

$$f \text{ est bornée} \iff |f| \text{ est majorée}$$

♥ *dem :* on procède par double implication.

- Montrons ($\Longleftarrow$) (le sens facile).
  Supposons que $|f|$ est majorée. Alors il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leqslant C$ (la constante C est nécessairement positive, car $|f|$ est une fonction positive). Or, on a vu que l'inégalité $|f(x)| \leqslant C$ signifiait :
  $$-C \leqslant f(x) \leqslant C$$
  Ceci étant vrai pour tout $x \in D$, cela montre que f est minorée par $-C$ et majorée par C. Elle est donc bornée.

- Montrons ($\Longrightarrow$).
  Supposons que f est bornée. Alors il existe deux constantes $m, M \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in D$:
  $$m \leqslant f(x) \leqslant M$$
  Soit $x \in D$. Le nombre $|f(x)|$ vaut $f(x)$ ou $-f(x)$.
  — 1er cas : si $f(x) \geqslant 0$. Alors on a les inégalités :
  $$|f(x)| = f(x) \leqslant M$$
  — 2ème cas : si $f(x) < 0$. Alors $|f(x)| = -f(x)$. Or, en multipliant par (-1) dans l'inégalité $m \leqslant f(x)$, on obtient $-f(x) \leqslant -m$. D'où les inégalités suivantes :
  $$|f(x)| = -f(x) \leqslant -m$$
  Il suffit alors de poser $C := \max(M, -m)$ pour que dans les deux cas on ait $|f(x)| \leqslant C$.
  Cette inégalité étant vérifiée pour tout $x \in D$, $|f|$ est majorée par C.

3 Dérivation

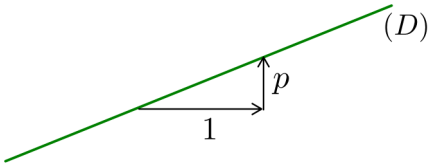
Dans cette partie, I et J désignent deux intervalles de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire des ensembles du type :

$$[a,b] \quad , \quad [a,b[\quad , \quad]a,b] \quad \text{ou} \quad]a,b[$$

où a et b désignent des réels, ou éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$.

3.1 Définition et propriétés (rappels de Terminale)

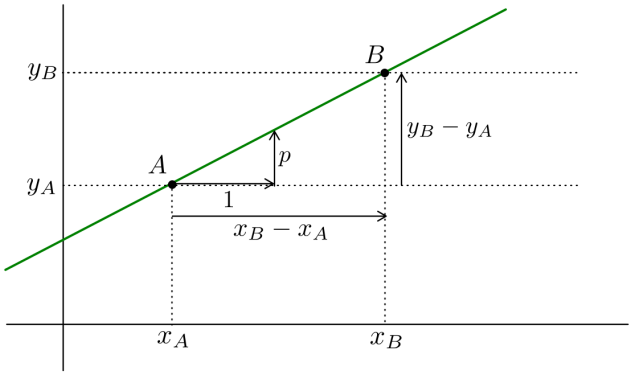
Rappels : La **pente** (ou le coefficient directeur) d'une droite du plan (D) non verticale est le déplacement vertical p qui correspond à un déplacement horizontal de 1.



Cette quantité p est *algébrique* au sens où elle est négative dans le cas d'un déplacement vertical "vers le bas".

Lorsqu'une droite (D) non verticale passe par deux points du plan $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, sa pente p vaut :

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



L'origine de cette formule est un simple théorème de Thalès dans le triangle ci-contre. L'égalité des rapports donne précisément :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{p}{1}$$

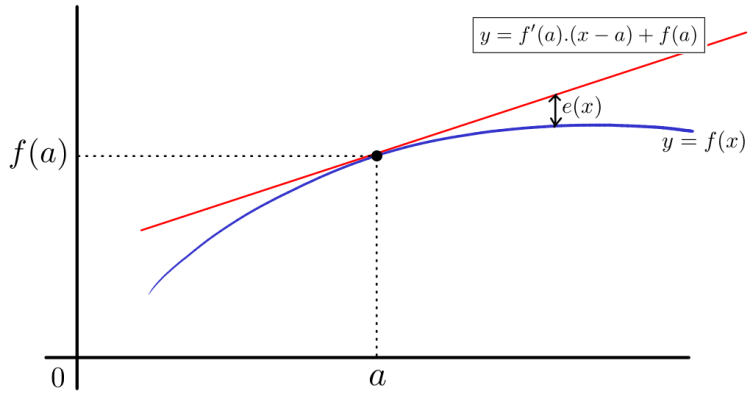
Définition. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **dérivable** en $a \in I$ si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas, cette limite est appelée $f'(a)$.*

Remarque : la quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une interprétation géométrique très claire. Il s'agit de la pente (ou coefficient directeur) de la droite qui passe par les points de la courbe $A\,(a, f(a))$ et $M_x\,(x, f(x))$.

Théorème (Equation de la tangente en un point)**.**
Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ son graphe. Si f est dérivable en $a \in I$, alors la droite tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A\,(a, f(a))$ a pour équation :

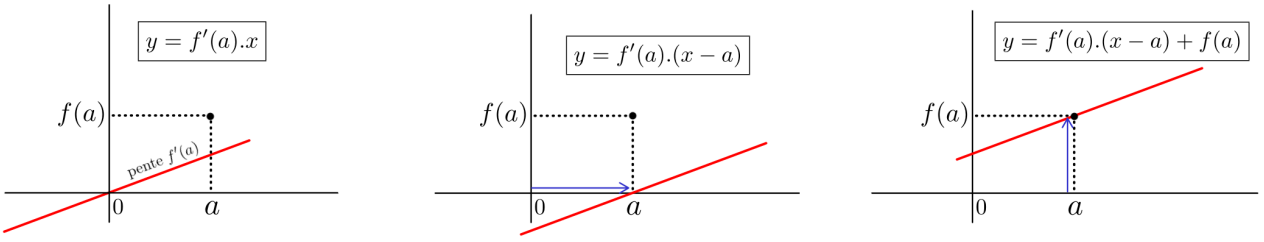
$$y = f'(a).(x - a) + f(a)$$

En particulier, la pente de cette droite est $f'(a)$ (sans surprise d'après sa définition).



Remarque : cette formule est construite pour décrire la droite de pente $f'(a)$ qui passe par le point $A(a, f(a))$.

$$y = \underbrace{f'(a)}_{\text{pente voulue}}\underbrace{(x-a)}_{\substack{\text{translation}\\\text{horizontale}}} + \underbrace{f(a)}_{\substack{\text{translation}\\\text{verticale}}}$$



Pour une fonction f dérivable en un point a, on parle parfois de la "pente de la courbe en a" pour parler de la pente de la droite tangente à la courbe en a. Cette pente vaut donc $f'(a)$.

Définition. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. On définit alors la* ***fonction dérivée*** *de f que l'on note f'.*

$$\begin{array}{rccc} f' : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

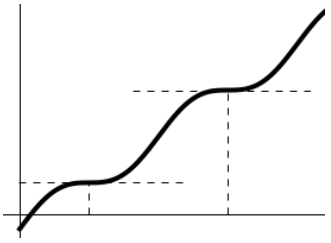
Théorème (Dérivée et variations)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.*

- *f est croissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.*
- *f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.*
- *f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.*

- *Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.*

Remarques :

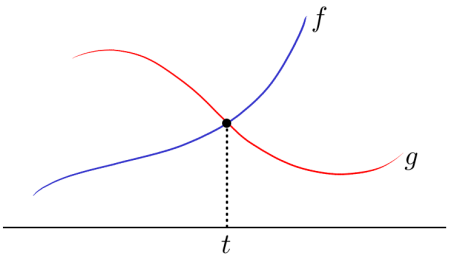
1. Si f' est strictement positive (resp. strict. négative) sur I **sauf en un nombre fini de points**, alors f est strictement croissante (resp. strict. décroissante) sur I.



2. Tout cela ne fonctionne que si I est un **intervalle**. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est bien dérivable sur tout son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$ et vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ que $f'(x) < 0$ car $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$. Pourtant, elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

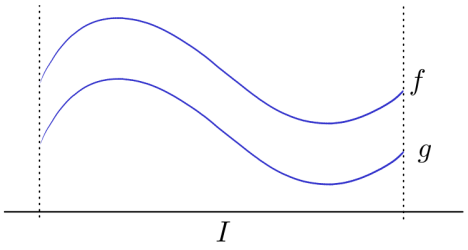
3.2 Notations des dérivées

Si $t \in I$, le nombre $f'(t)$ **ne s'obtient pas par une opération sur $f(t)$.**



En revanche, si on a l'égalité de deux fonctions sur tout un intervalle, comme par exemple :

$$\forall t \in I\,,\ f(t) = g(t) + 1$$



Alors on a l'égalité de leurs dérivées sur tout cet intervalle :

$$\forall t \in I\,,\ f'(t) = g'(t)$$

La dérivation est donc bien une opération sur les fonctions, et non pas sur l'une de leurs valeurs. Conséquences en termes de notations :

~~$\big(f(t)\big)'$~~ $\longrightarrow$ $f'(t)$

~~$f(t)$ est dérivable pour $t \in [1, +\infty[$~~ $\longrightarrow$ f est dérivable sur $[1, +\infty[$

~~xe^{2x} est dérivable sur $\mathbb{R}^*$~~ $\longrightarrow$ $(x \mapsto xe^{2x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

~~$\big(e^{2t} + 2t^3\big)' = 2e^{2t} + 6t^2$~~ $\longrightarrow$ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(e^{2t} + 2t^3\big) = 2e^{2t} + 6t^2$

Pour n'importe quelle variable (mettons x), la notation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\dots)$ permet de dériver une expression $(\dots)$ en l'interprétant comme une fonction de x.
Exemples :

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(s^2 + sf(s)\big) = 2s + f(s) + sf'(s)$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(2t) + xt^2 + g(x) - e^{yt}\big) = 2f'(2t) + 2xt - ye^{yt}$

Dans le dernier exemple, comme la dérivation se fait par rapport à la variable t, on dérive la fonction :

$$\mathbf{t} \mapsto f(2\mathbf{t}) + x\mathbf{t}^{\mathbf{2}} + g(x) - e^{y\mathbf{t}}$$

et donc les quantités x et y sont des constantes dans cette opération.

Notation. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si une fonction f est n fois dérivable sur son ensemble de définition, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième. On a alors :*

$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \big(f^{(k)}\big)' = f^{(k+1)} \end{cases}$$

⚠ Tout comme la dérivation simple, la dérivation n-ième s'applique aux fonctions, et non à leurs valeurs en un point. Donc :

$$\cancel{\big(f(t)\big)^{(n)}} \quad \longrightarrow \quad f^{(n)}(t)$$

Pour dériver n fois une expression par rapport à une variable (par exemple x), on dispose de la notation $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\dots)$. Par exemple, pour tous $x, t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\big(xe^s + e^t + s^3\big) = xe^s + 6s$$

et non pas : $\cancel{\big(xe^s + e^t + s^3\big)^{(2)} = xe^s + 6s}$.

3.3 Dérivée des fonctions usuelles (rappels de Terminale)

Fonction	Dérivée	Ensemble de validité
$x \mapsto C \ \ (C \in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \ \ (n \in \mathbb{Z})$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}^*$ (et $\mathbb{R}$ si $n > 0$)
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

3.4 Règles de calcul des dérivées

Théorème (Opérations algébriques sur les dérivées)**.** *Soient u et v deux fonctions dérivables sur I et λ un réel. Alors :*

- *$u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$;*
- *λu est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda u'$;*
- *uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$;*
- *si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.*

Théorème (Dérivée d'une composée)**.** *Soit $u : I \to \mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Si la fonction u est à valeurs dans J (l'ensemble de dérivabilité de f), alors la composée $f \circ u : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, et pour tout $x \in I$:*

$$\boldsymbol{(f \circ u)'(x) = f'\big(u(x)\big) \times u'(x)}$$

Autrement dit : $(f \circ u)' = f'(u) \times u'$.

Exemples : pour une fonction u dérivable :

- $(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$
- $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \times u' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ si u est à valeurs dans $]0, +\infty[$
- $(e^u)' = e^u \times u'$
- $\big(\ln(u)\big)' = \dfrac{1}{u} \times u' = \dfrac{u'}{u}$ si u est à valeurs dans $]0, +\infty[$
- $\sin(u)' = \cos(u) \times u'$
- $\cos(u)' = -\sin(u) \times u'$
- $\tan(u)' = (1 + \tan^2(u)) \times u'$ si u ne prend jamais les valeurs $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$

Remarque sur les notations en physique : en physique, lorsqu'une variable y dépend d'une autre variable x, qui elle-même dépend d'une variable t, on est donc dans une situation du type :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = u(t) \end{cases} \quad \text{et on a donc :} \quad y(t) = f\big(u(t)\big) = f \circ u(t)$$

Dans ce cas, l'égalité mathématique :

$$y'(t) = f'\big(u(t)\big) \times u'(t)$$

s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}_{y'(t)} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{f'(x)} \times \underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{x'(t)}$$

Visuellement, c'est d'une simplicité miraculeuse, car on a l'impression qu'on a divisé et multiplié par $\mathrm{d}x$.

4 Dérivation de l'application réciproque d'une bijection

Théorème (de dérivation des applications réciproques)**.**

Soit f une fonction réalisant une bijection entre deux intervalles I (son ensemble de départ) et J (son ensemble d'arrivée, qui vaut donc $f(I)$ puisque f est surjective).

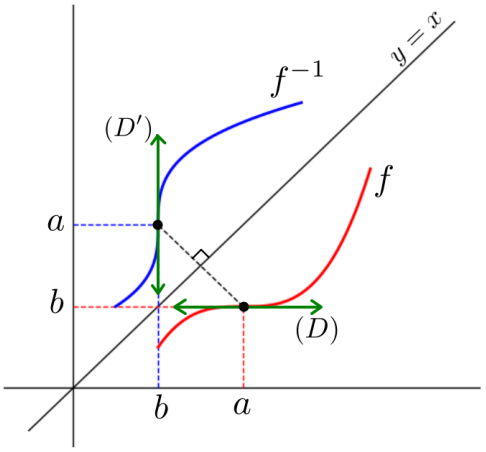
Si :
- *f est dérivable sur I ;*
- *f' ne **s'annule jamais sur** $\mathbf{I}$;*

alors :
- *la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur J ;*
- *pour tout $x \in J$:*

$$\boldsymbol{\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}$$

"dem géométrique" : on sait que le graphe de f^{-1} est symétrique à celui de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Fixons $a \in I$. Notons $b = f(a)$. Comme f est dérivable en a, son graphe admet une tangente (D) au point $M(a, b)$.
Donc le graphe de f^{-1} admet une tangente (D') au point $M'(b, a)$, et (D') est le symétrique de (D).

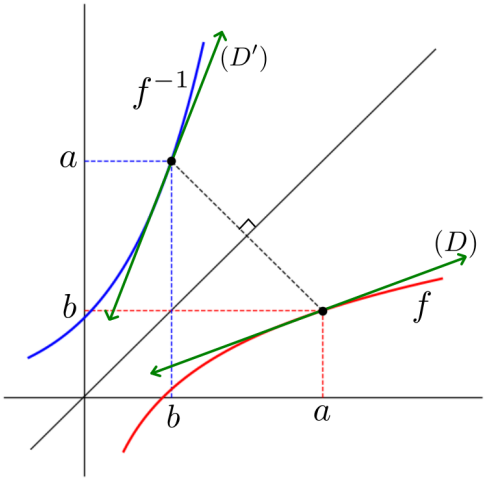
► **1er cas : si $\mathbf{f'(a) = 0}$**



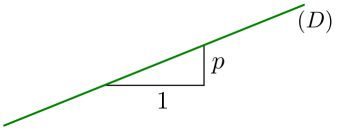
La droite (D) est horizontale. Donc (D') est verticale.

Conclusion : f^{-1} n'est pas dérivable en b, et son graphe admet en b une tangente verticale.

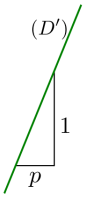
► **2ème cas : si $\mathbf{f'(a) \neq 0}$**



(D) est de pente $p := f'(a)$:



Donc symétriquement :



(D') est de pente $\boxed{\frac{1}{p} = \frac{1}{f'(a)}}$.

Donc f^{-1} est dérivable en b, et $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Or, $b = f(a)$, donc $a = f^{-1}(b)$. On obtient donc : $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$

Remarques :

1. On peut retrouver rapidement la formule en dérivant la relation :

$$\forall x \in J\,,\ f \circ f^{-1}(x) = x$$

En effet, cela donne, pour tout $x \in J$:

$$\big(f \circ f^{-1}\big)'(x) = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad f'\big(f^{-1}(x)\big) \times \big(f^{-1}\big)'(x) = 1$$
$$\text{et donc :} \quad \big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} \qquad \underline{\text{ok}}$$

2. On retrouve que f^{-1} a la même monotonie que f, puisque sa dérivée $(f^{-1})'$ a le même signe que celui de f'.

Exemples :

▶ **Dérivation de la fonction logarithme**

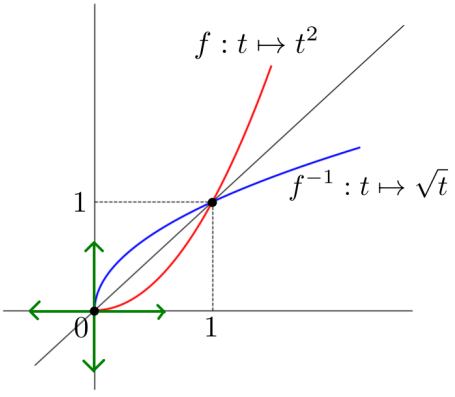
Si l'on a construit la fonction $f = \exp\ :\ \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ et qu'on dispose de sa dérivée, alors on peut se servir de ce théorème pour obtenir la dérivée de sa fonction réciproque $\ln\ :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. En effet, f est dérivable, et sa dérivée $f' = \exp$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. Donc par théorème de dérivation des applications réciproques, ln est dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x > 0$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{f'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

▶ **Dérivation de la fonction racine carrée**

A l'origine, la fonction racine carrée est la réciproque de la fonction carrée restreinte à $[0, +\infty[$:

$$f\ :\ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ t & \longmapsto & t^2 \end{array}$$



La fonction f est bien dérivable, mais sa dérivée $f' : t \mapsto 2t$ s'annule en 0. Donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en $f(0)$ (c'est-à-dire en 0), et en ce point, son graphe admet une tangente verticale.

Pour appliquer le théorème, on peut par exemple restreindre f à $]0, +\infty[$. Elle réalise alors une bijection entre $]0, +\infty[$ et $]0, +\infty[$, et sa dérivée ne s'annule jamais.

Par théorème de dérivation des applications réciproques, la fonction racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $t > 0$:

$$\text{racine}'(t) = \frac{1}{f'\big(\text{racine}(t)\big)} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$